Vibraciones Mecánicas

Introducción a la teoría de las vibraciones mecánicas

Profesor

Dr. Ing. Martín Sánchez

Jefe de Trabajos Prácticos

Ing. Gustavo Rosenthal

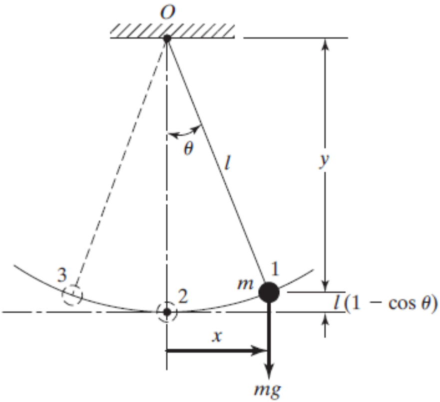
Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional La Plata

Departamento de Ingeniería Mecánica

10 de Abril 2013

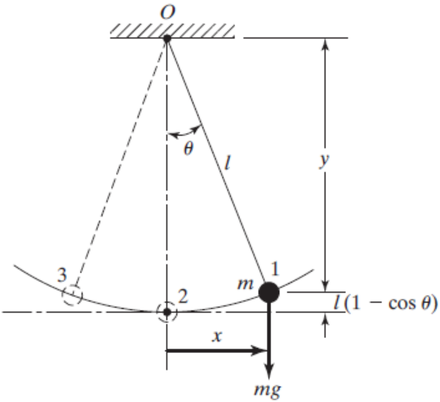
1. Sistemas de un grado de libertad (SDoF)
   - Definición: 1gdl
   - Ecuación de movimiento
   - Ecuación de movimiento para un sistema torsional
   - Relaciones en la ecuación de movimiento
   - Clasificación de los sistemas
2. Respuesta libre de los sistemas de 1gdl
   - Solución de la ecuación diferencial
3. Respuesta forzada de los sistemas de 1gdl
   - Solución de la ecuación diferencial
   - Fenomeno de resonancia

Definición: Sistemas de un grado de libertad (SDoF)



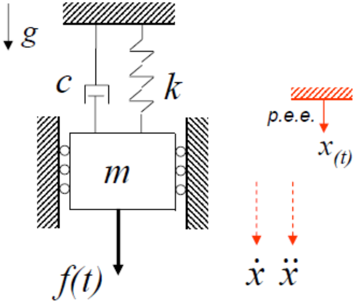
- ¿Que son las vibraciones?
  Todo movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo.

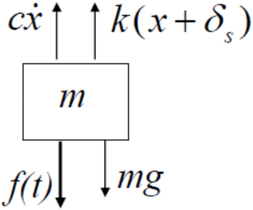
Definición: Sistemas de un grado de libertad (SDoF)



- ¿Que son las vibraciones?
  Todo movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo.
- ¿Que son los GdL?
  Mínimo de coordenadas independientes para determinar las posiciones de todas las partes.

Ecuación de movimiento: Newton





La **ecuación diferencial** ordinaria de 2° orden será:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

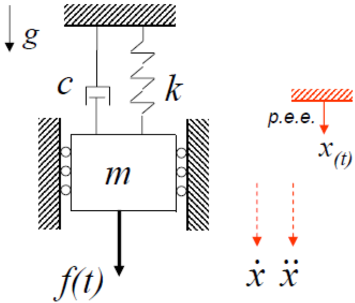
con **condiciones inciales**:

$$\begin{aligned} x_{(t=0)} &= X_0 \\ \dot{x}_{(t=0)} &= V_0 \end{aligned}$$

Ecuación de movimiento: Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange, en términos de coordenadas generalizadas, tienen la forma:

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$



- Función Disipación

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

- Fuerza Generlizada

$$Q_x = f(t)$$

- Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- Energía Potencial

$$V = -mg(\delta + x) + \frac{1}{2}k(\delta + x)^2$$

Sistema torsional

- Torque:

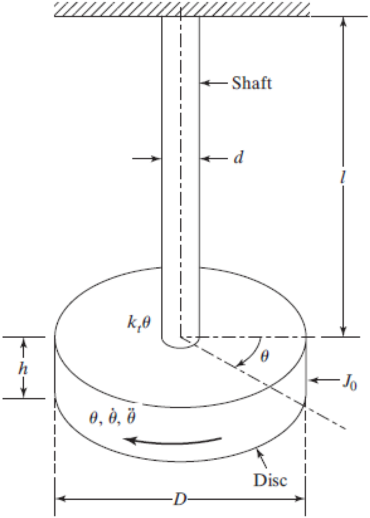
$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta$$

donde:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

- Rigidez torsional:

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$



Ecuación de movimiento:

$$J_0\ddot{\theta}(t) + c_t\dot{\theta}(t) + k_t\theta(t) = M_t$$

Relaciones en la ecuación de movimiento

Teniendo en cuenta distintas relaciones se puede expresar la ecuación de movimiento del sistema:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Definiciones:

- Frecuencia natural: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Relación de amortiguamiento: $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$$

Clasificación en base a la excitación

Estudiaremos la respuesta dinámica (los cambios dependientes del tiempo) de un sistema mecánico vibratorio debido a dos tipos de consideraciones:

- Respuesta libre: Movimiento debido a condiciones iniciales especificadas (perturbaciones del equilibrio).

Clasificación en base a la excitación

Estudiaremos la respuesta dinámica (los cambios dependientes del tiempo) de un sistema mecánico vibratorio debido a dos tipos de consideraciones:

- Respuesta libre: Movimiento debido a condiciones iniciales especificadas (perturbaciones del equilibrio).
- Respuesta forzada: Movimiento resultante de excitaciones externas especificas.

Clasificación en base a la excitación

Estudiaremos la respuesta dinámica (los cambios dependientes del tiempo) de un sistema mecánico vibratorio debido a dos tipos de consideraciones:

- Respuesta libre: Movimiento debido a condiciones iniciales especificadas (perturbaciones del equilibrio).
- Respuesta forzada: Movimiento resultante de excitaciones externas especificas.
  - Excitaciones deterministas
    - Periódicas: Armónicas simples y complejas.
    - No Periódicas: Transitorias e impulsivas.
  - Excitaciones aleatorias
    - Estacionarias: Señales estadísticas, no dependientes del tiempo.
    - No Estacionarias: Señales estadísticas, dependientes del tiempo.

Respuesta libre sin amortiguamiento (i)

La respuesta libre se basa en:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1}$$

cuya solución es de la forma:

$$x(t) = Ce^{st} \tag{2}$$

Introduciendo 2 en 1 $\Rightarrow$ **Ecuación Caracteristica**

$$ms^2 + k = 0$$

con:

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \pm i\omega_0$$

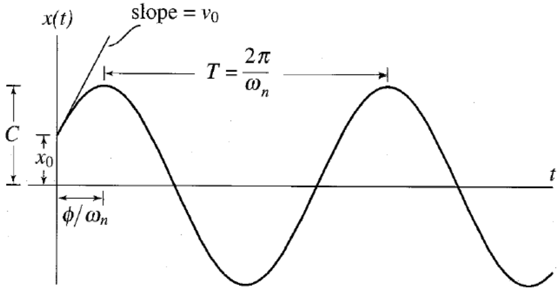
Respuesta libre sin amortiguamiento (ii)

La solución será

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{3}$$

$x(t)$ debe ser real $\Longrightarrow$ C_1 es el conjugado de C_2 y:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{4}$$



Respuesta forzada sin amortiguamiento

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Al estudiar al sistema sin amortiguamiento y para excitación armónica:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 cos(\omega t) \tag{5}$$

la solución sera de la formá:

$$x(t) = x(t)_h + x(t)_p$$

asumiendo la solución particular del tipo:

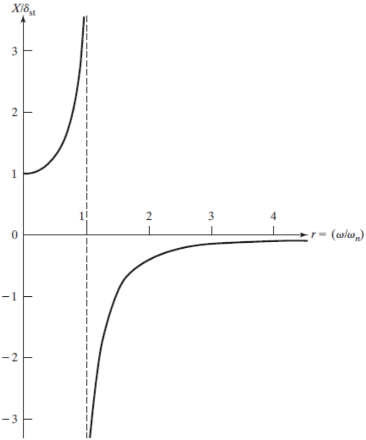
$$x(t)_p = Xcos(\omega t) \tag{6}$$

Introduciendo la 6 en 5 se obtiene:

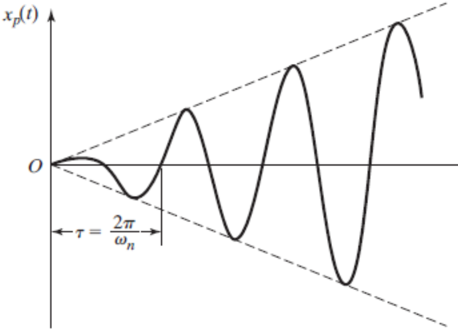
$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_s}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{7}$$

Respuesta forzada sin amortiguamiento

Respuesta en frecuencia



Respuesta en tiempo $\omega_0 = \omega$



Fenomeno de resonancia (i)

Fenomeno de resonancia (ii)