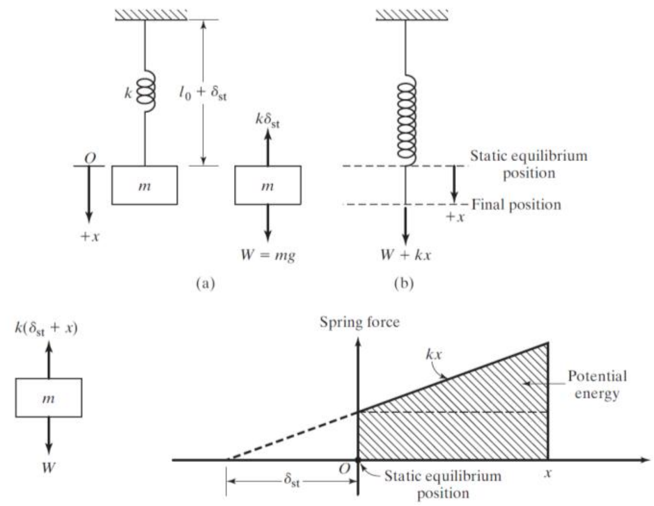
Sistemas de un grado de libertar – libre

Ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte

Considerando el sistema de la figura y por la aplicación dela segunda ley de Newton o principio de conservación de la energía $\frac{d}{dt}(T+U)=0$.

La ecuación de movimiento estará dada por la siguiente ecuación:

$$m\,\ddot{x}+K\,x=0$$



La solución de la ecuación diferencial homogénea será:

$$x_{(t)}=C\,e^{st}$$

Que sustituida en la ecuación de movimiento y como C no puede ser cero tenemos.

$$C\,(m\,\mathrm{s}^2+\mathrm{K})=0$$

$$m\,\mathrm{s}^2+\mathrm{K}=0$$

Aplicando bascara $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\mathrm{s}=\pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{1/2}=\pm i\omega_n$ Donde $i=\sqrt{-1}$

$\omega_n=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$

La solución de la ecuación de movimiento de acuerdo con los dos valores obtenidos por bascara está dada por:

$$x_{(t)}=C_1\,e^{st}+C_2\,e^{-st}$$

Remplazando

$$x_{(t)} = C_1\, e^{i\omega_n t} + C_2\, e^{-i\omega_n t}$$

Utilizando identidades $e^{\pm i\propto t} = \cos \propto t\ \pm i \sin \propto t$

Remplazando $x_{(t)} = A_1 \cos \omega_n t\ + A_2 \sin \omega_n t$

Donde A1 y A2 pueden ser determinados por condiciones iniciales del sistema. Dos condiciones son evaluadas para estas constantes.

$$x_{(t=0)} = A_1 = x_0$$

$$\dot{x}_{(t=0)} = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

Remplazando $x_t = x_0 \cos \omega_n t\ + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$

Esta es una ecuación armónica función del tiempo. El movimiento es simétrico alrededor de la posición de equilibrio de la masa M.

La ecuación de movimiento puede expresarse aplicando identidades como:

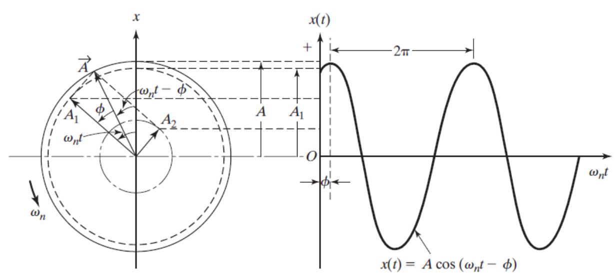
$x_t = A\cos(\omega_n t - \emptyset\ )$

$\dot{x}_t = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \emptyset\ )$

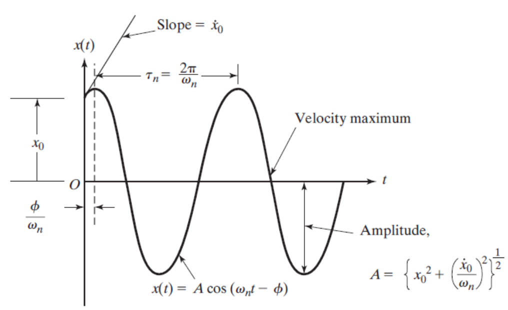
$\ddot{x}_t = -{\omega_n}^2 A \cos(\omega_n t - \emptyset\ )$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

$\emptyset = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\ \ \omega_n}\right)$



(a) (b)



(c)

Ejemplo:

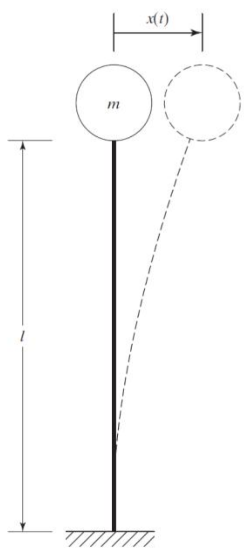
El tanque de agua de la figura, que tiene 300 Ft de altura y esta hecha de concreto reforzado de sección tubular de 8 ft de diámetro interior y 10 ft de diámetro exterior. El tanque pesa $6 \text{ x } 10^5$ lb con el tanque lleno de agua. Despresiando la masa de la columna y considerando un modulo Young's de $4 \text{ x } 10^6$ psi, determinarlo siguiente.

a- La frecuencia natural transversal y su periodo del tanque de agua.
b- La respuesta del sistema con un desplazamiento transversal inicial de 10 in.
c- Los máximos valores de velocidad y aceleración transversal.

solución

a- La deflexión δ transversal de la viga para una carga P esta dada por $\delta = \frac{P\,l^3}{3\,E\,I}$

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{3\,E\,I}{l^3}$$



$$I = \frac{\pi}{64}(d_0^4 + d_I^4) = \frac{\pi}{64}(120^4 + 96^4)$$
$$= 600{,}9554\ X\ 10^4\ in^4$$

Donde

$$K = \frac{3\ (4 \text{ x } 10^6)\ (600{,}9554\ X\ 10^4)}{3600^3}$$
$$= 1545{,}6672\ {}^{lb}/_{in}$$

$$w_n = \sqrt[2]{\frac{K}{m}} = \sqrt[2]{\frac{1545{,}6672}{6\ X\ 10^5}}$$
$$= 0{,}9977\ {}^{rad}/_{seg}$$

El periodo estará dado por: $\tau_n = \frac{2\pi}{w_n} = \frac{2\pi}{0{,}9977\ {}^{rad}/_{seg}} = 6{,}2977\ sec$

b- Considerando un desplazamiento inicial de 10 in y una velocidad inicial 0, la respuesta armonica del tanque será

$$x_t = A_0 \cos(\omega_n t - \emptyset\,)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} = x_0 = 10\ in$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \ \omega_n}\right) = 0$$

$$x_t = 10\cos(0{,}9977t\ )$$

c- La velocidad del tanque se puede obtener derivando la ecuación de movimiento

$$\dot{x}_t = -\omega_n A\sin(\omega_n t - \emptyset\ ) = -(0{,}9977)\ 10\sin(0{,}9977\ t\ )$$

La máxima velocidad se produce cuando $\omega_n t = {\pi}/{2}$

$$\dot{x}_{max} = -\omega_n A = -(0{,}9977)\ 10 = 9{,}977\ {in}/{sec}$$

La aceleración estará dada por

$$\ddot{x}_t = -\omega_n{}^2 A\cos(\omega_n t - \emptyset\ ) = -(0{,}9977)^2 10\cos(0{,}9977\ t)$$

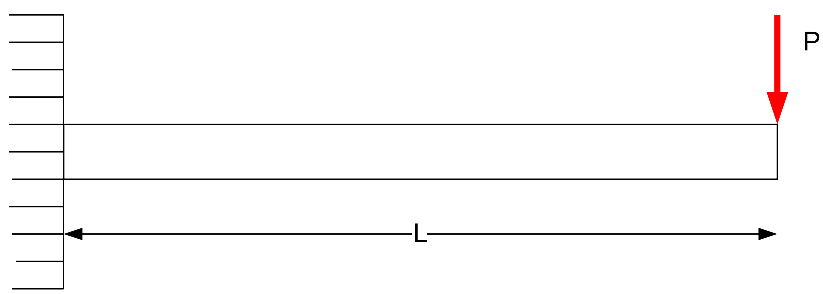
La máxima velocidad se produce cuando $\omega_n t = 0\ o\ \pi$

$$\ddot{x}_t = -\omega_n{}^2 A = -(0{,}9977)^2 10 = 9{,}9540\ {in}/{seg^2}$$

Ejercicio:

Cuando se le aplica una carga de 2303 N al extremo de una viga, esta carga producirá una deflexión de la viga dada por la siguiente ecuación.
Nota: para resolver este problema se considera la viga sin peso propio.

$$\delta = \frac{P \times L^3}{3 \times E \times J}$$



J: 516 Cm4

L: 3.04 m

Determinar. a)- K de la viga. b)- frecuencia de la viga.

Resultado. a)- K: 113448.27 N/m. b)- f: 3.49 Hz.

a)-

$$\delta = \frac{P \times L^3}{3 \times E \times J} = \frac{\frac{2303}{9.8} \times 304^3}{3 \times 2100000 \times 516} = 2.03cm$$

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{2303}{\frac{2.03}{100}} = 113448.27 N/m$$

b)-

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{113448.27}{\frac{2303}{9.8}}} = 21.97 rad/seg$$

$$f = \frac{21.97}{2\pi} = 3.49 Hz$$

Vibraciones libres sin amortiguamiento de un sistema torsional

Si un cuerpo rígido oscila alrededor de un eje de referencia, el movimiento resultante es llamado vibración torsional. En este caso el movimiento del cuerpo es medido en termino de coordenadas angulares.

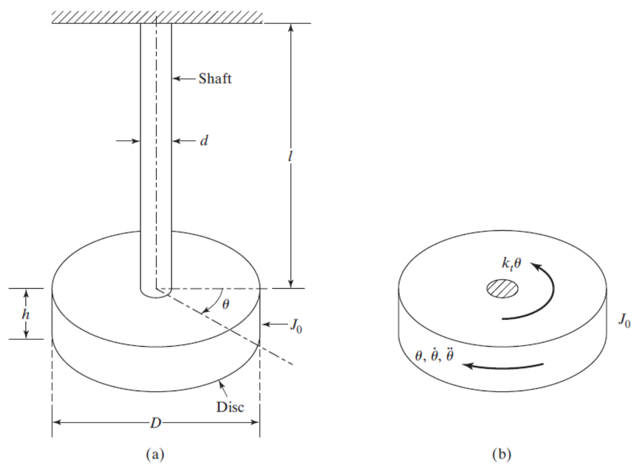
En el sistema de la figura podemos ver que se trata de un disco (momento de inercia J_0), montado sobre un eje, donde uno de sus extremos se encuentra fijo. La rotación angular del disco sobre el eje será Θ, siendo Θ también el ángulo de torsión que sufre el eje.

De la mecánica sabemos que el momento torsor estará dado por:

$$Mt = \frac{G\, I_0}{l}$$

$$I_0 = \frac{\pi\, d^4}{32}$$

$$Kt = \frac{Mt}{\theta} = \frac{G\, \pi\, d^4}{32\, l}$$



La ecuación de movimiento angular estará dada por la aplicación de la segunda ley de Newton o cualquiera de los otros métodos que se verán mas adelante.

$$J_0\, \ddot{\theta} + K_t\, \theta = 0$$

La frecuencia natural del sistema estará dada por:

$$w_n = \sqrt[2]{\frac{K_t}{J_0}}$$

El momento de inercia del disco estará dado por:

$$J_0 = \frac{\rho\, h\, \pi\, D^4}{32}$$

La solución de la ecuación de movimiento del sistema torsional presentado arriba, es igual que determinada para un sistema masa-resorte libre sin amortiguamiento.

$$\theta_{(t)} = C\, e^{st}$$

$$\theta_{(t)} = A_1 \cos \omega_n t\ + A_2 \sin \omega_n t$$

Las constantes A1 yA2 pueden ser determinadas estableciéndole condiciones iniciales al sistema.

$$\theta_{(t=0)} = \theta_0$$

$$\dot{\theta}_{(t=0)} = \dot{\theta}_0$$

Remplazando y operando sobre las ecuaciones.

$$\theta_{(t=0)} = A_1 = \theta_0$$

$$\dot{\theta}_{(t=0)} = A_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}$$

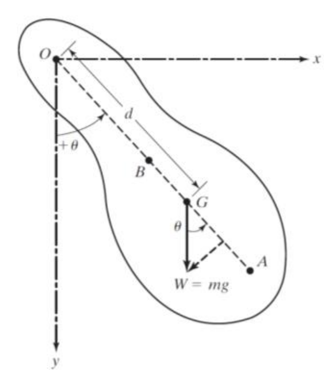
Por tal tendremos que la ecuación del movimiento torsional libre sin amortiguamiento será

$$\theta_{(t)} = \theta_0 \cos \omega_n t\ + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

Ejemplo

Un cuerpo rígido pivotes en un punto, mientras que el centro de masa oscila bajo la fuerza de la gravedad. Este sistema es conocido como péndulo compuesto.

Encontrar la frecuencia natural del sistema.



El cuerpo rígido oscila en plano x-y donde la coordenada Θ puede ser usada para describir el movimiento. Donde d determina distancia entre O y G y J_0 el momento de inercia del cuerpo sobre el eje Z . para un determinado desplazamiento Θ el torque de restauración es $W\ d\ \sin \theta = 0$

Aplicado la segunda ley de Newton.

$$J_0\, \ddot{\theta} + W\ d\ \sin \theta = 0$$

Nota: se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Sin embargo es posible encontrar una solución exacta. Una solución aproximada puede encontrase por dos métodos, un proceso numérico puede ser usado para integrar la ecuación. Alternativamente puede ser aproximada por una ecuación lineal, cuya solución puede determinarse fácilmente. Para ello asumimos que pequeños desplazamientos de Θ y $\sin \theta \approx \theta$. De esta manera se puede aproximar a una ecuación lineal.

$$J_0\,\ddot{\theta} + W\,d\,\theta = 0$$

$$w_n = \sqrt[2]{\frac{W\,d}{J_0}} = \sqrt[2]{\frac{m\,g\,d}{J_0}}$$

Rayleigh método

El principio de conservación de la energía, en contesto con un sistema sin amortiguamiento, pued ser re expresado como:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

Donde los subíndices 1 y 2 denotan dos diferentes estados de tiempo. Específicamente usamos 1 para describir el momento en que la masa esta pasado por la condijo de equilibrio y seleccionamos $U_1 = 0$ como referencia e la energía potencial. Si dejamos indicado con 2 al momento que obtenemos el máximo desplazamiento de la masa, entonces $T_2 = 0$, quedándonos:

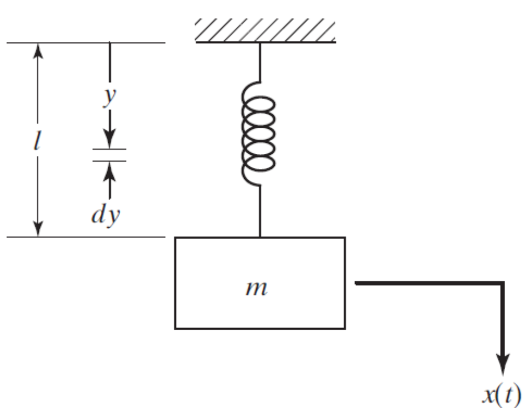
$$T_1 + 0 = 0 + U_2$$

Si se trata de un sistema de movimiento armónico, entonces T_1 y U_2 denotan los máximos valores de energía cinética y potencial respectivamente.

Ejemplo

Efecto de la masa de un resorte sobre la frecuencia natural de este.

Utilizaremos el método de energía para determinar la frecuencia natural. L denota la longitud total del resorte. Si x hace referencia al desplazamiento del extremo inferior del resorte o masa (m), entonces el desplazamiento a una distancia (y) desde su extremo empotrado estará dado por: $y\left(\frac{x}{l}\right)$, de la misma manera podremos determinar la velocidad de cada uno de los puntos del resorte en función del desplazamiento $x_{(t)}$, por lo tanto la velocidad del resorte localizado a una distancia y de este será: $y\left(\frac{\dot{x}}{l}\right)$. La energía cinética del elemento d_y será:



$$dT_s = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{l}\,d_y\right)\left(\frac{y\dot{x}}{l}\right)^2$$

De donde m_s es la masa del resorte. La energía cinética total del sistema será:

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \int_{y=0}^{l} \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{l}\, d_y\right)\left(\frac{y\dot{x}}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2$$

La energía potencial total será:

$$U = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

Como se trata de un sistema armónico simple

$$x_t = X\cos(\omega_n t\,)$$

Reemplazando nos queda:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\;\, {\omega_n}^2 X^2 \left(m + \frac{m_s}{3}\right);\, U_{max} = \frac{1}{2}\, k\, X^2$$

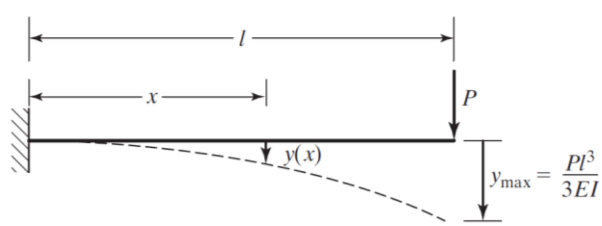
Aplicando Rayleigh

$$T_1 + 0 = 0 + U_2\,;\;\; {\omega_n}^2 \left(m + \frac{m_s}{3}\right) = \; k$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}}$$

<u>Efecto de la masa de una columna de un tanque a agua sobre la frecuencia natural</u>

la columna consiste en una viga en voladizo con uno de sus extremos fijos en la tierra y la masa del tanque en el otro. La deflexión estática de la viga bajo una carga concentrada estará dada por:



$$y_x = \frac{P\, x^2}{6\, E\, I}(3l - x) = \frac{y_{max}\, x^2}{2\, l^3}(3l - x)$$

$$= \frac{y_{max}}{2\, l^3}(3\, x^2 l - x^3)$$

De donde M es la masa del resorte. La energía cinética total del sistema será:

$$T = \frac{1}{2}\, M\, \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{m}{l}\, (\dot{y}_x)^2\, d_x$$

$$T = \frac{1}{2}\ M\ \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{m}{l}\ (\dot{y}_x)^2\ d_x$$

$$\dot{y}_x = \frac{\dot{y}_{max}}{2\ l^3}(3\ x^2 l - x^3)$$

$$T = \frac{1}{2}\ M\ \dot{y}^2 + \frac{m}{2l}\left(\frac{\dot{y}_{max}}{2\ l^3}\right)^2 \int_0^l (3\ x^2 l - x^3)^2\ d_x$$

$$T = \frac{1}{2}\ M\ \dot{y}^2 + \frac{m}{2l}\frac{\dot{y}_{max}{}^2}{4\ l^6}\left(\frac{33}{35}l^7\right) = \frac{1}{2}\ M\ \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{33}{140}m\right)\dot{y}_{max}{}^2$$

La energía potencial total será:

$$U = \frac{1}{2}\ k\ y^2$$

Como se trata de un sistema armónico simple

$$y_t = Y\cos(\omega_n t\ )$$

La máxima energía cinética de la viga será:

$$T = \frac{1}{2}\ M\ \omega_n{}^2 Y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{33}{140}m\right)\omega_n{}^2 Y^2$$

$$U = \frac{1}{2}\ k\ Y^2$$

Reemplazando nos queda:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\ \ \omega_n{}^2 Y^2\left(M + \frac{33}{140}m\right);\ U_{max} = \frac{1}{2}\ k\ Y^2$$

Aplicando Rayleigh

$$T_1 + 0 = 0 + U_2\ ;\ \ \omega_n{}^2\left(M + \frac{33}{140}m\right) = \ k$$

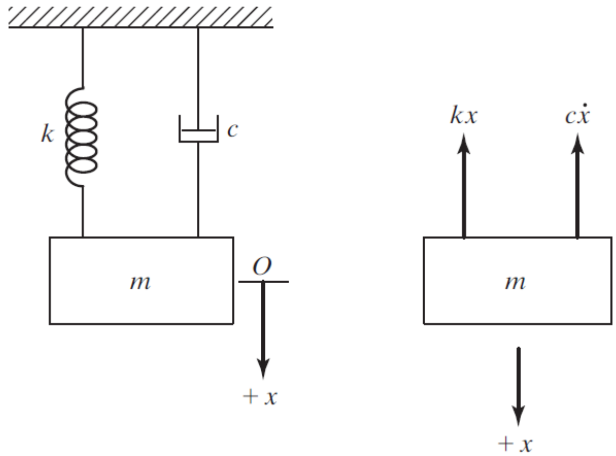
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{33}{140}m}}$$

Vibración libre con un sistema viscoso

En este sistema la fuerza es proporcional a la velocidad.

$F = C\,\dot{x}$

Donde C es el coeficiente de amortiguamiento viscoso, donde el signo negativo indica que esta fuerza es opuesta a la dirección de la velocidad.



La ecuación de movimiento estará dada por:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

De donde asumimos que la solución estará dada por:

$x_{(t)} = e^{st}$

Aplicando ecuaciones diferenciales tenemos:

$m\,s^2 + c\,s + k = 0$

De donde aplicando bascara tenemos dos posibles soluciones:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$x_{1(t)} = C_1\,e^{s1t}$; $x_{2(t)} = C_2\,e^{s2t}$

$x_t = C_1\,e^{s1t} + C_2\,e^{s2t}$

$$x_t = C_1\,e^{\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} + C_2\,e^{\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que se determinan por condiciones de borde.

Para reducir la ecuación consideraremos un amortiguamiento critico (C_c), definido como el valor de amortiguamiento en los que la solución dentro de la raíz es igual a cero.

$$\frac{{c_c}^2}{2m} - \frac{4mk}{2m} = 0$$

Despejando C_c

$c_c = 2\,m\,\omega_n$

Para cualquier amortiguamiento definimos ζ a la relación de amortiguamiento.

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$\frac{c_c}{2m} = \frac{c}{c_c}\,\frac{c}{2m} = \zeta\,\omega_n$$

$$x_t = C_1\,e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + C_2\,e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

Dentro de los sistemas amortiguados podemos identificar tres: subamortiguado, sobre amortiguado y críticamente amortiguado.

<u>Caso 1 subamortiguado</u>: para este caso $\zeta < 1$. Para esta condición el término dentro de la raíz es negativo, por tal los términos $s_1\ y\ s_2$se reescriben de la forma:

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n\ ;\ s_2\left(= -\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n$$

Reemplazando y aplicado las identidades trigonométricas correspondientes tenemos:

$$x_t = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1{}'\ \cos\left(\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t + C_2{}'\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right)$$

Si consideramos como condiciones de borde para $x_{(t=0)} = x_{(0)}\ y\ \dot{x}_{(t=0)} = \dot{x}_{(0)}$ tenemos:

$$C_1{}' = x_0\ \ y\ \ C_2{}' = \frac{\dot{x}_{(0)} + \zeta\,\omega_n\,x_0}{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n}$$